數學傳播 50卷2期, pp. 133-141

談平面歐拉不等式的又幾種加强

張 贇

摘要: 這篇文章討論了和三角形的內心, 中線, 高線, 角平分線, 旁切圓半徑, 外接圓半徑, 內切圓半徑相關的一些不等式, 這些不等式都不同程度的加強了歐拉不等式, 有一定的理論意義。

關鍵詞: 平面歐氏幾何、三角形的特殊線段、歐拉不等式、幾何不等式。

1. 導言

給定一個三角形 $\triangle ABC$, 如果 R, r 分別表示其外接圓和內切圓的半徑; O 和 I 依次表示這個三角形的外心和內心, 那麼 $OI^2 = R^2 - 2Rr$, 這就是著名的歐拉公式或歐拉定理[1][2][3][4]。注意到 $IO^2 \geq 0$ 則 $R \geq 2r$。這便是平面歐拉不等式。

關於歐拉不等式的加強或隔離的結果真可謂數不勝數, 特別是文 [1], [2] 等文獻中, 如

$$36r^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

(J. Neuberg. Edu. Times, News Ser., 9(1906), 51-52, 見文 [1] P194-2)。

$$\frac{\sqrt{3}}{R} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r}.$$

(F. Leunberger. Elem. Math., 15(1960), 77-79, 見文 [2] P61-5.22)。

$$1 \leq \frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{(ab+bc+ca)^2} \leq \frac{R}{2r}.$$

(Elem. Math., 1973, 28:102 或 1974, 29: 96-99, 見文 [1] P199-55)。

$$6 \leq \csc\frac{A}{2} + \csc\frac{B}{2} + \csc\frac{C}{2} \leq 2(\frac{R}{r} + 1).$$

(劉保乾等, 見文 [1] P214-145)。

$$2 \leq \sum \frac{a^2}{t_b^2 + t_c^2} \leq \sum \frac{a^2}{h_b^2 + h_c^2} \leq \frac{R}{r},$$

$$\Big(\text{其中} \sum \text{表示循環和, 如} \sum \frac{a^2}{t_b^2 + t_c^2} = \frac{a^2}{t_b^2 + t_c^2} + \frac{b^2}{t_c^2 + t_a^2} + \frac{c^2}{t_a^2 + t_b^2} \text{ 等}\Big).$$

(郝迎利,「中學數學」(武漢), 2001, 11:20, 見文 [1] P228-54)。

$$\frac{9}{4} \le \sum \frac{m_a^2}{bc} \le \frac{9R}{8r},$$

(其中 m_a 表示 a 邊上的中線長, 見文 [1] P221-29)。

上面這些結果都是平面歐拉不等式 $R \ge 2r$ 的加強式或隔離式, 且形式優美、簡潔, 給人以賞心悅目之感。但並非所有平面歐拉不等式的加強式都能如此, 有些加強式形式非常複雜, 給人以「慘不忍睹」, 當然其理論價值就大打折扣了。本文想再介紹平面歐拉不等式的幾種加強, 以爲平面歐拉不等式的加強式隊伍添磚加瓦。

2. 預備知識

取 $\triangle A_1A_2A_3$, 設 m_k, h_k, t_k, r_k $(k=1,2,3)$ 順次表示經過頂點 A_k 的中線長, 高線長, 角平分線的長, 以及相應於邊長 a_k 的旁切圓半徑。I、s、$\triangle$ 分別表示 $\triangle A_1A_2A_3$ 的內心、半周長、面積。用 $\sum$ 和 $\prod$ 表示循環和與積, 如 $\sum a_1 = a_1+a_2+a_3$, $\prod a_1 = a_1a_2a_3$ 等。

由三角形的面積公式 $\triangle = \frac{1}{2}a_1a_2\sin A_3 = \frac{1}{2}a_2a_3\sin A_1 = \frac{1}{2}a_3a_1\sin A_2$ 和正弦定理 $\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{a_2}{\sin A_2} = \frac{a_3}{\sin A_3} = 2R$ 可得 $\prod a_1 = 4R\triangle$。而 $\triangle = \frac{1}{2}r(a_1+a_2+a_3) = rs$, 所以, 我們有

$$\prod a_1 = 4R\triangle = 4Rrs. \tag{1}$$

由三角形面積的海倫 (Heron) 公式 $\triangle = \sqrt{s(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)}$ (見文 [3], [4]) 和 $\prod a_1 = 4R\triangle = 4Rrs$ 容易得到

$$\sum a_1a_2 = s^2+4Rr+r^2. \tag{2}$$

由 $\sum a_1a_2 = s^2+4Rr+r^2$ 和 $\left(\sum a_1\right)^2 = \sum a_1^2 + 2\sum a_1a_2$ 可得

$$\sum a_1^2 = 2(s^2-4Rr-r^2). \tag{3}$$

由三角形的內切圓和中線長定義也很快能得到

$$IA_1 = \frac{r}{\sin\frac{A_1}{2}} \text{ 等}, \quad \sum m_1^2 = \frac{3}{4}\sum a_1^2. \tag{4}$$

最後我們來介紹三角形中一個重要不等式 — Gerretsen 不等式。

引理 (Gerretsen **不等式**): 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中, 有

$$16Rr-5r^2 \le s^2 \le 4R^2+4Rr+3r^2. \tag{5}$$

證明:

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2 &= 4R^2(\sin^2 A_1+\sin^2 A_2+\sin^2 A_3)\\ &= 4R^2[\sin^2 A_1+\sin^2 A_2+\sin^2(A_1+A_2)]\\ &= 4R^2(\sin^2 A_1+\sin^2 A_2+\sin^2 A_1\cos^2 A_2+\cos^2 A_1\sin^2 A_2\\ &\quad +2\sin A_1\cos A_2\times\cos A_1\sin A_2\cos A_2)\\ &= 4R^2(1-\cos^2 A_1+1-\cos^2 A_2+\sin^2 A_1\cos^2 A_2+\cos^2 A_1\sin^2 A_2\\ &\quad +2\sin A_1\cos A_1\sin A_2\cos A_2)\\ &= 8R^2(1-\cos^2 A_1\cos^2 A_2+\sin A_1\cos A_1\sin A_2\cos A_2)\\ &= 8R^2[1-\cos A_1\cos A_2(\cos A_1\cos A_2-\sin A_1\sin A_2)]\\ &= 8R^2(1+\cos A_1\cos A_2\cos A_3), \end{aligned}$$

所以 $\cos A_1\cos A_2\cos A_3=\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2-8R^2}{8R^2}$.

因爲 $\sum a_1^2=2(s^2-4Rr-r^2)$,

所以 $\cos A_1\cos A_2\cos A_3=\dfrac{2(s^2-4Rr-r^2)-8R^2}{8R^2}=\dfrac{s^2-4Rr-r^2-4R^2}{4R^2}$.

由文 [1] (見文 [1] P208-53) 得

$$\frac{3r}{R}-1-\frac{3}{2}\Big(\frac{r}{R}\Big)^2\le\cos A_1\cos A_2\cos A_3\le\frac{1}{2}\Big(\frac{r}{R}\Big)^2.$$

當 $\dfrac{3r}{R}-1-\dfrac{3}{2}\Big(\dfrac{r}{R}\Big)^2\le\dfrac{s^2-4Rr-r^2-4R^2}{4R^2}$ 時,

$12Rr-4R^2-6r^2\le s^2-4Rr-r^2-4R^2$,

所以 $s^2\ge 16Rr-5r^2$.

當 $\dfrac{s^2-4Rr-r^2-4R^2}{4R^2}\le\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{r}{R}\Big)^2$ 時,

$s^2-4Rr-r^2-4R^2\le 2r^2$,

即 $s^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$.

這樣, 我們就完成了 Gerretsen 不等式的證明。

3. 主要結果

定理1: $\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^2\le\dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{IA_1^2}{m_1^2}+\dfrac{IA_2^2}{m_2^2}+\dfrac{IA_3^2}{m_3^2}\Big)\le 1.$

證明: 由預備知識和柯西不等式得

$$
\begin{aligned}
\frac{IA_1^2}{m_1^2}+\frac{IA_2^2}{m_2^2}+\frac{IA_3^2}{m_3^2} &\geq \frac{\left(\sum IA_1\right)^2}{\sum m_1^2}=\frac{\left(\sum \frac{r}{\sin\frac{A_1}{2}}\right)^2}{\frac{3}{4}\sum a_1^2}=\frac{4r^2}{3\sum a_1^2}\Big(\sum\frac{1}{\sin\dfrac{A_1}{2}}\Big)^2\\
&\geq \frac{4r^2}{3\sum a_1^2}\Big(\frac{9}{\sum\sin\dfrac{A_1}{2}}\Big)^2=\frac{4\times 3^3r^2}{\sum a_1^2}\times\frac{1}{\left(\sum\sin\dfrac{A_1}{2}\right)^2}\\
&=\frac{4\times 3^3r^2}{2(s^2-4Rr-r^2)}\times\frac{1}{\left(\sum\sin\dfrac{A_1}{2}\right)^2}\\
&\geq \frac{2\times 3^3r^2}{4R^2+4Rr+3r^2-4Rr-r^2}\times\frac{1}{\left(\sum\sin\dfrac{A_1}{2}\right)^2}\\
&=\frac{27r^2}{2R^2+r^2}\times\frac{1}{\left(\sum\sin\dfrac{A_1}{2}\right)^2}\\
&\geq \frac{27r^2}{2R^2+\left(\dfrac{1}{2}R\right)^2}\times\frac{1}{\left(\sum\sin\dfrac{A_1}{2}\right)^2}=3\Big(\frac{2r}{R}\Big)^2\frac{1}{\left(\sum\sin\dfrac{A_1}{2}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

注意到 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 內是上凸函數, 那麼

$$\sum\sin\frac{A_1}{2}\leq 3\sin\frac{\sum\dfrac{A_1}{2}}{3}=\frac{3}{2}.$$

所以 $3\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^2\dfrac{1}{\left(\sum\sin\dfrac{A_1}{2}\right)^2}\geq 3\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^2\times\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{3}\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^2$,

所以 $\dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{IA_1^2}{m_1^2}+\dfrac{IA_2^2}{m_2^2}+\dfrac{IA_3^2}{m_3^2}\Big)\geq\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^2$.

另一方面

$$
\begin{aligned}
m_1&=\frac{\sqrt{2a_2^2+2a_3^2-a_1^2}}{2}\geq\sqrt{s(s-a_1)},\\
\sin^2\frac{A_1}{2}&=\frac{1-\cos A_1}{2}=\frac{(s-a_2)(s-a_3)}{a_2a_3}=\frac{ra_1}{4R(s-a_1)}\ \text{等},
\end{aligned}
$$

所以

$$\frac{IA_1^2}{m_1^2}+\frac{IA_2^2}{m_2^2}+\frac{IA_3^2}{m_3^2}\le\sum\frac{1}{s(s-a_1)}\times\frac{r^2}{\sin^2\dfrac{A_1}{2}}=\sum\frac{r^2}{s(s-a_1)}\times\frac{4R(s-a_1)}{ra_1}$$

$$=\frac{4Rr}{s}\sum\frac{1}{a_1}=\frac{1}{s^2}\sum a_1a_2=\frac{s^2+4Rr+r^2}{s^2}.$$

而 $\dfrac{s^2+4Rr+r^2}{s^2}\le\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow s^2\ge 12Rr+3r^2,$

$$s^2\ge 16Rr-5r^2,$$

$$16Rr-5r^2\ge 12Rr+3r^2\Leftrightarrow R\ge 2r.$$

所以 $\dfrac{s^2+4Rr+r^2}{s^2}\le\dfrac{4}{3},$

即 $\dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{IA_1^2}{m_1^2}+\dfrac{IA_2^2}{m_2^2}+\dfrac{IA_3^2}{m_3^2}\Big)\le 1.$

這樣我們就證明了定理1。

顯然, 定理 1 強於歐拉不等式 $R\ge 2r$。

定理2: $\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^{\frac{2}{3}}\le\dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{IA_1^2}{h_1^2}+\dfrac{IA_2^2}{h_2^2}+\dfrac{IA_3^2}{h_3^2}\Big)\le\Big(\dfrac{R}{2r}\Big)^2.$

證明:

$$\frac{IA_1^2}{h_1^2}+\frac{IA_2^2}{h_2^2}+\frac{IA_3^2}{h_3^2}\ge 3\Big(\prod\frac{IA_1}{h_1}\Big)^{\frac{2}{3}}=\frac{3r^2}{\Big(\prod\sin\dfrac{A_1}{2}\Big)^{\frac{2}{3}}}\times\frac{1}{\Big(\prod\dfrac{2rs}{a_1}\Big)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{3R^{\frac{2}{3}}r^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}s^{\frac{4}{3}}}\Big(\frac{1}{\prod\sin\dfrac{A_1}{2}}\Big)^{\frac{2}{3}}\ge\frac{3R^{\frac{2}{3}}r^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\Big(\dfrac{27R^2}{4}\Big)^{\frac{2}{3}}}\Big(\frac{1}{\prod\sin\dfrac{A_1}{2}}\Big)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{2}{3}}\Big(\frac{1}{\prod\sin\dfrac{A_1}{2}}\Big)^{\frac{2}{3}}.$$

由定理 1 的證明知 $\sum\sin\dfrac{A_1}{2}\le\dfrac{3}{2}.$

那麼 $\dfrac{3}{2}\ge 3\Big(\prod\sin\dfrac{A_1}{2}\Big)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow\Big(\prod\sin\dfrac{A_1}{2}\Big)^{\frac{1}{3}}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow\Big(\prod\sin\dfrac{A_1}{2}\Big)^{\frac{2}{3}}\le\dfrac{1}{4}.$

所以 $\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^{\frac{2}{3}}\Big(\dfrac{1}{\prod\sin\dfrac{A_1}{2}}\Big)^{\frac{2}{3}}\ge\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^{\frac{2}{3}}\times 4=\dfrac{4}{3}\Big(\dfrac{2r}{R}\Big)^{\frac{2}{3}}.$

即 $\frac{3}{4}\Big(\frac{IA_1^2}{h_1^2}+\frac{IA_2^2}{h_2^2}+\frac{IA_3^2}{h_3^2}\Big)\ge\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{2}{3}}$.

注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{4}\Big(\frac{IA_1^2}{h_1^2}+\frac{IA_2^2}{h_2^2}+\frac{IA_3^2}{h_3^2}\Big)\\
&\quad=\frac{3}{4}\sum\Big(\frac{r}{\sin\frac{A_1}{2}}\Big)^2\times\Big(\frac{a_1}{2rs}\Big)^2=\frac{3}{16s^2}\sum\frac{a_1^2}{\sin^2\frac{A_1}{2}}=\frac{3}{16s^2}\sum a_1^2\times\frac{4R(s-a_1)}{ra_1}\\
&\quad=\frac{3R}{4rs^2}\sum a_1(s-a_1)=\frac{3R}{4rs^2}\Big(s\sum a_1-\sum a_1^2\Big)=\frac{3R}{4rs^2}\Big[2s^2-2(s^2-4Rr-r^2)\Big]\\
&\quad=\frac{3R}{4rs^2}(8Rr+2r^2)=\frac{3R}{2s^2}(4R+r)\le\frac{3R}{2\times 27r^2}(4R+r)\le\frac{R}{18r^2}(4R+\frac{R}{2})=\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2.
\end{aligned}$$

所以定理 2 獲證。

$$\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2\ge\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow\frac{R}{2r}\ge 1\Leftrightarrow R\ge 2r.$$

說明定理 2 隔離了歐拉不等式 $R\ge 2r$。

定理3: $\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{4}{3}}\le\frac{3}{4}\Big(\frac{IA_1^2}{t_1^2}+\frac{IA_2^2}{t_2^2}+\frac{IA_3^2}{t_3^2}\Big)\le\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2$.

證明: 考慮到 $\triangle A_1A_2A_3$ 的角平分線公式和定理 1, 定理 2 的證明, 我們有

$$\begin{aligned}
&t_1=\frac{2\sqrt{a_2a_3s(s-a_1)}}{a_2+a_3}\le\frac{(a_2+a_3)\sqrt{s(s-a_1)}}{a_2+a_3}=\sqrt{s(s-a_1)},\\
&\frac{3}{4}\Big(\frac{IA_1^2}{t_1^2}+\frac{IA_2^2}{t_2^2}+\frac{IA_3^2}{t_3^2}\Big)\ge\frac{3}{4}\times 3\Big(\prod\frac{IA_1^2}{t_1^2}\Big)^{\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}\Big(\frac{r^3}{\prod\sin\frac{A_1}{2}}\Big)^{\frac{2}{3}}\times\Big(\frac{1}{\prod t_1}\Big)^{\frac{2}{3}}\\
&\ge\frac{9r^2}{4}\times 4\Big(\frac{1}{\prod t_1}\Big)^{\frac{2}{3}}\ge 9r^2\Big[\frac{1}{\sqrt{s^3(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)}}\Big]^{\frac{2}{3}}=9r^2\Big(\frac{1}{r}\Big)^{\frac{2}{3}}\Big(\frac{1}{s^2}\Big)^{\frac{2}{3}}\\
&\ge 9r^{\frac{4}{3}}\Big(\frac{1}{\frac{27R^2}{4}}\Big)^{\frac{2}{3}}=\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

另一方面

$$\frac{3}{4}\Big(\frac{IA_1^2}{t_1^2}+\frac{IA_2^2}{t_2^2}+\frac{IA_3^2}{t_3^2}\Big)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4s\prod a_1}\Big[\sum\Big(\frac{r}{\sin\frac{A_1}{2}}\Big)^2\times\frac{a_1(2s-a_1)^2}{s-a_1}\Big]$$
$$=\frac{3}{4}r^2\times\frac{1}{4s\times 4Rrs}\times\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A_1}{2}}\times\frac{a_1(2s-a_1)^2}{s-a_1}=\frac{3}{16s^2}\times\sum(2s-a_1)^2$$
$$=\frac{3}{8s^2}\Big(\sum a_1^2+\sum a_1a_2\Big)=\frac{3}{8s^2}[2(s^2-4Rr-r^2)+s^2+4Rr+r^2]$$
$$=\frac{3}{8s^2}(3s^2-4Rr-r^2)\le\frac{3}{8s^2}[3(4R^2+4Rr+3r^2)-4Rr-r^2]$$
$$=\frac{3}{2s^2}(3R^2+2Rr+2r^2)\le\frac{3}{2s^2}(3R^2+R\times R+2\times\frac{R^2}{4})$$
$$\le\frac{3}{2\times 27r^2}\times\frac{9R^2}{2}=\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2.$$

這樣我們就完成了定理 3 的證明。

注意到 $\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2\ge\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{4}{3}}\Leftrightarrow\Big(\frac{R}{2r}\Big)^{\frac{10}{3}}\ge 1\Leftrightarrow R\ge 2r$。

說明定理 3 將歐拉不等式 $R\ge 2r$ 隔離了。

定理 4: $9\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{4}{3}}\le\frac{27}{4}\sum\frac{IA_1^2}{r_1^2}\le 140\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2-131.$

證明: 因為 $r_k=\frac{rs}{s-a_k}$ $(k=1,2,3)$, $\prod r_1=rs^2$,

所以
$$\sum\frac{IA_1^2}{r_1^2}=\sum\Big(\frac{r}{\sin\frac{A_1}{2}}\Big)^2\times\Big(\frac{s-a_1}{rs}\Big)^2=\frac{1}{s^2}\sum\Big(\frac{s-a_1}{\sin\frac{A_1}{2}}\Big)^2$$
$$\ge\frac{3}{s^2}\Big[\frac{\prod(s-a_1)}{\prod\sin\frac{A_1}{2}}\Big]^{\frac{2}{3}}\ge\frac{3}{s^2}\times 4\times\Big[\prod(s-a_1)\Big]^{\frac{2}{3}}=\frac{12}{s^2}\Big[\prod(s-a_1)\Big]^{\frac{2}{3}}$$
$$=12\Big(\frac{r}{s}\Big)^{\frac{4}{3}}\ge 12\Big(r\times\frac{1}{\frac{3\sqrt{3}R}{2}}\Big)^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{4}{3}},$$

所以 $\frac{27}{4}\sum\frac{IA_1^2}{r_1^2}\ge 9\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{4}{3}}$.

考慮到

$$\begin{aligned}
\sum\frac{IA_1^2}{r_1^2}&=\sum\Big(\frac{r}{\sin\frac{A_1}{2}}\Big)^2\Big(\frac{s-a_1}{rs}\Big)^2=\frac{1}{s^2}\sum\Big(\frac{s-a_1}{\sin\frac{A_1}{2}}\Big)^2\\
&=\frac{1}{s^2}\sum(s-a_1)^2\times\frac{4R(s-a_1)}{ra_1}=\frac{4R}{rs^2}\sum\frac{(s-a_1)^3}{a_1}\\
&=\frac{4R}{rs^2}\sum\Big(\frac{s^3}{a_1}-3s^2+3sa_1-a_1^2\Big)\\
&=\frac{4Rs}{r}\sum\frac{1}{a_1}-\frac{36R}{r}+\frac{12R}{rs}\sum a_1-\frac{4R}{rs^2}\sum a_1^2\\
&=\frac{4Rs}{r}\times\frac{\sum a_1a_2}{\prod a_1}-\frac{36R}{r}+\frac{12R}{rs}\times 2s-\frac{4R}{rs^2}\sum a_1^2\\
&=\frac{4Rs}{r}\times\frac{s^2+4Rr+r^2}{4Rrs}-\frac{36R}{r}+\frac{24R}{r}-\frac{4R}{rs^2}[2(s^2-4Rr-r^2)]\\
&=\frac{s^2+4Rr+r^2}{r^2}-\frac{12R}{r}-\frac{8R}{rs^2}(s^2-4Rr-r^2)\\
&\le\frac{4R^2+4Rr+3r^2+4Rr+r^2}{r^2}-\frac{12R}{r}-\frac{8R}{r}+\frac{32R^2}{s^2}+\frac{8Rr}{s^2}\\
&=\frac{4(R^2+2Rr+r^2)}{r^2}-\frac{20R}{r}+\frac{8R(4R+r)}{s^2}\\
&=\frac{4(R^2+2Rr+r^2)}{r^2}-\frac{20R}{r}+\frac{8R(4R+r)}{27r^2}\\
&=\frac{140R^2}{27r^2}-\frac{316Rr}{27r^2}+4\le\frac{4\times 140}{27}\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2-\frac{316}{27r}\times 2r+4\\
&=\frac{4\times 140}{27}\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2-\frac{524}{27},
\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{27}{4}\sum\dfrac{IA_1^2}{r_1^2}\le 140\Big(\dfrac{R}{2r}\Big)^2-131.$

所以定理 4 獲證。

記 $\Big(\dfrac{R}{2r}\Big)^{\frac{4}{3}}=x$, 則 $x>0$, 那麼

$$9\Big(\frac{2r}{R}\Big)^{\frac{4}{3}}\le 140\Big(\frac{R}{2r}\Big)^2-131\Leftrightarrow 140x^3-131\ge 9x^{-2}\Leftrightarrow 140x^5-131x^2-9\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 131x^2(x^3-1)+9(x^5-1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[131x^2(x^2+x+1)+9(x^4+x^3+x^2+x+1)]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x\ge 1\Leftrightarrow \Big(\frac{R}{2r}\Big)^{\frac{2}{3}}\ge 1\Leftrightarrow R\ge 2r.$$

說明定理 4 隔離了歐拉不等式 。

4. 結語

本文在已知的一些平面歐拉不等式加強式的基礎上, 得到了幾個新的有關三角形歐拉不等式的加強式, 有一定的理論價值。探討和平面歐拉不等式有關的幾何問題是一件很有意義的事情, 親愛的朋友, 您願意加入我們的探討隊伍嗎?!

參考文獻

1. 匡繼昌。常用不等式[M]。濟南: 山東科技出版社 (第3版), 2004, 1。
2. O. Bottema 等著, 單墫譯。幾何不等式 [M]。北京: 北京大學出版社, 1991, 9。
3. 沈文選。初等數學研究教程[M]。長沙: 湖南教育出版社, 1996, 8。
4. [美] R. A. 約翰遜著, 單墫譯。近代歐氏幾何學 [M]。上海: 上海教育出版社, 1999, 8。

—本文作者爲退休高中數學教師—